2021 研究生入学考试考研数学试卷（数学一）

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

(A) 连续且取得极大值　　(B) 连续且取得极小值

(C) 可导且导数为零　　(D) 可导且导数不为零

2. 设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$， $f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

(A) $dx+dy$　　(B) $dx-dy$　　(C) dy　　(D) $-dy$

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则

(A) $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$　　(B) $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

(C) $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$　　(D) $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数和负惯性指数依次为

(A) 2,0　　(B) 1,1　　(C) 2,1　　(D) 1,2

6. 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ 记 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-k\beta_1,\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2$，若

β_1,β_2,β_3 两两正交，则 l_1,l_2 依次为

(A) $\frac{5}{2},\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$　　(D) $-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$

7. 设 A,B 为 n 阶实矩阵，下列不成立的是

(A) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^TA \end{pmatrix}=2r(A)$　　(B) $r\begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix}=2r(A)$

(C) $r\begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^TA \end{pmatrix}=2r(A)$　　(D) $r\begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{pmatrix}=2r(A)$

8. 设 A,B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$，下列为假命题的是

(A) 若 $P(A|B)=P(A)$,则 $P(A|\overline{B})=P(A)$

(B) 若 $P(A|B)>P(A)$,则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(A)$

(C) 若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$,则 $P(A|B)>P(A)$

(D) 若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$,则 $P(A)>P(B)$

9. 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_1;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本，令

$\theta=u_1-u_2,\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$,则

(A) $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏差估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

(B) $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏差估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

(C) $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏差估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(D) $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏差估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

10. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu,4$ 简单随机样本，考虑假设检验问题：$H_0:\mu\le 10,H_1:\mu>10,\Phi(x)$ 表示标准正太分布函数，若该检验问题的拒绝域为 $W=\{\overline{X}\ge 11\}$,其中 $\overline{X}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i$，则 $\mu=11.5$，该检验犯第二类错误的概率为

(A) $1-\Phi(0.5)$　　(B) $1-\Phi(1)$　　(C) $1-\Phi(1.5)$　　(D) $1-\Phi(2)$

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

11. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=$__________

12. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2e^t+t+1 \\ y=4(t-1)e^t+t^2 \end{cases}$ 确定，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=$__________

13. 欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1,y'(1)=2$ 的解为 $y=$__________

14. 设 Σ 为空间区域 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+4y^2\le 4, 0\le z\le 2\}$ 表面的外侧，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$__________

15. 设 $A=a_{(ij)}$ 为 3 阶矩阵，A_{ij} 为代数余子式，若 A 的每行元素之和均为 2，且 $|A|=3$，则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$__________

16. 甲、乙两个盒子中有 2 个红球和 2 个白球，选取甲盒中任意一球，观察颜色后放入乙盒，再从乙盒中任取一球，令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球的个数，则 X 与 Y 的相关系数为__________

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答题纸指定位置上．

17. （本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$

18. （本题满分 12 分）

设 $u(x)=e^{-nx}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}(n=1,2,\ldots)$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

19. （本题满分 12 分）

已知曲线 C: $\begin{cases} x^2+2y^2-z=6 \\ 4x+2y+z=30 \end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

20. （本题满分 12 分）

设 $D\subset R^2$ 是有界单连通区域，$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy$ 取得最大值的积分区域记为 D_1

(1) 求 $I(D_1)$ 的值.

(2) 计算 $\int_{\partial_{D_1}} \dfrac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)dx+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)dy}{x^2+4y^2}$，其中 ∂_{D_1} 是 D_1 的正向边界

21. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(1) 求正交矩阵 P ,使 P^TAP 为对角矩阵

(2) 求正定矩阵 C ,使 $C^2=(a+3)E-A$, E 为 3 阶单位矩阵.

22. 在区间 $(0,2)$ 上随机取一点,将该区间分成两段,较短一段的长度记为 X ,较长一段的长度记为 Y .令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(1) 求 X 的概率密度;(2)求 Z 的概率密度;(3)求 $E(\dfrac{X}{Y})$.

2021 考研数学试卷答案速查（数学一）

一、选择题

(1)（D）	(2)（C）	(3)（A）	(4)（B）	(5)（B）
(6)（A）	(7)（C）	(8)（D）	(9)（C）	(10)（B）

二、填空题

(11) $\dfrac{\pi}{4}$　　(12) $\dfrac{2}{3}$　　(13) $y=x^2$

(14) 4π　　(15) $\dfrac{3}{2}$　　(16) $\dfrac{1}{5}$

三、解答题

(17) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}$（2 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\int_0^x e^{t^2}dt}{(e^x-1)\sin x}\quad（4 分）$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x^2)+1-\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}\quad（7 分）$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}+\lim_{x\to 0}e^{x^2}\quad（9 分）$$

$$=\frac{1}{2}\quad（10 分）$$

(18) $u_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}(n=1,2,\cdots)$

(1) 设 $v_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}$， $w_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$， 则 $u_n(x)=v_n(x)+w_n(x)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}$ 收敛区间为 $(0,+\infty)$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 收敛区间为 $(-1,1)$（3 分）

$x=0$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$， 级数发散

$x=1$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$， 级数收敛

所以级数的收敛域为 $(0,1]$.（4 分）

（2） $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}[1-\mathrm{e}^{-nx}]}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}(x>0)$ （6 分）

$$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

则 $S_2''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}(x\neq 1)$

$S_2'(x)-S_2'(0)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln|1-x|$，因为 $S_2'(0)=0$，所以 $S_2'(x)=-\ln|1-x|(x\neq 1)$

$S_2(x)-S_2(0)=\int_0^x-\ln|1-t|\mathrm{d}t=(1-x)\ln|1-x|+x$，因为 $S_2(0)=0$，所以

$S_2(x)=(1-x)\ln|1-x|+x(x\neq 1)$ （9 分）

因此 $x\neq 1$ 时，$S(x)=S_1(x)+S_2(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}+(1-x)\ln|1-x|+x$

当 $x=1$ 时，和函数连续，所以 $S(1)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}+(1-x)\ln|1-x|+x\right)=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}}+1$

所以，$S(x)=\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}+(1-x)\ln|1-x|+x, & 0<x<1\\ \frac{\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}}+1 & x=1\end{cases}$ （12 分）

（19） 根据题意，目标函数为 $f(x,y,z)=z^2$，约束条件是 $x^2+2y^2-z-6=0$ 以及 $4x+2y+z-30=0$ （2 分）

设 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+2y^2-z-6)+\mu(4x+2y+z-30)$

$$\begin{cases}F_x'=2\lambda x+4\mu=0\\ F_y'=4\lambda y+2\mu=0\\ F_z'=2z-\lambda+\mu=0\\ F_\lambda'=x^2+2y^2-z-6=0\\ F_\mu'=4x+2y+z-30=0\end{cases}$$ （6 分）

解得 $(x,y,z)=(4,1,12)$ 或者 $(x,y,z)=(-8,-2,66)$ （10 分）

$f(4,1,12)=12^2$，$f(-8,-2,66)=66^2$

因此距离的最大值为 66 （12 分）

（20）

（1）根据题意，易知 $D_1=\left\{x^2+y^2\leqslant 4\right\}$

$$\iint_{D_1} 4-x^2-y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\int_0^2(4-r^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=8\pi$$ （4 分）

（2） $\displaystyle\int_{\partial_{D_1}}\frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$

$$P(x,y)=\frac{xe^{x^2+4y^2}+y}{x^2+4y^2},Q(x,y)=\frac{4ye^{x^2+4y^2}-x}{x^2+4y^2}$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{8xye^{x^2+4y^2}(x^2+4y^2-1)+x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

补充曲线 $l_1:x^2+4y^2=\varepsilon^2$ （顺时针方向）

$$\int_{\partial_{D_1}}\frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$$
$$=\oint_{\partial_{D_1}+l_1}\frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}-\oint_{l_1}\frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$$

由格林公式可知，

$$\oint_{\partial_{D_1}+l_1}\frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\iint_{D_2}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

其中 D_2 为 ∂_{D_1} 和 l_1 围成的封闭区域.（8 分）

$$\oint_{l_1}\frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{l_1}\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y$$

根据格林公式

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{l_1}\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_3}-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\pi\cdot\varepsilon\cdot\frac{1}{2}\varepsilon=\pi$$

其中 D_3 是 l_1 围成的封闭区域.

所以 $\displaystyle\int_{\partial_{D_1}}\frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=-\pi$ （12 分）

(21)

(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & 1\\ -1 & \lambda-a & 1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a+1)^2(\lambda-a-2)$

令 $|\lambda E-A|=0$，解得 $\lambda_1=\lambda_2=a-1,\lambda_3=a+2$ （2 分）

$(a-1)E-A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，解得 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$(a+2)E-A\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，解得 $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ （4 分）

将 α_1,α_2 进行施密特正交化可得 $\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ （6 分）

将 $(\beta_1,\beta_2,\alpha_3)$ 单位化，可得 $\gamma_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\gamma_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,

可得正交矩阵 $P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，使 $P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix}a-1 & 0 & 0\\ 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & a+2\end{pmatrix}$ （8 分）

(2)因为 $P^TAP=\Lambda$ 可知 $A=P\Lambda P^T$，

$$C^2=(a+3)E-A=P\left[(a+3)E-\Lambda\right]P^T=P\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^T=P\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^TP\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^T$$

因为 C 为正定矩阵，所以

$$C=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}^T$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$ （12 分）

(22)

易知 $X+Y=2, Y>X>0$，且 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布;

（Ⅰ）X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\0, & 其他\end{cases}$. （4 分）

（Ⅱ）Z 的分布函数 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\left\{\frac{2-X}{X}\leqslant z\right\}$：

$z<1$时，$F_Z(z)=0$；$z\geqslant 1$时，$F_Z(z)=\int_{\frac{2}{z+1}}^{1}1dx=1-\frac{2}{z+1}$；

Z 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{2}{(z+1)^2}, & z\geqslant 1\\0, & 其他\end{cases}$. （8 分）

（Ⅲ）$E\left(\frac{X}{Y}\right)=E\left(\frac{X}{2-X}\right)=\int_0^1\frac{x}{2-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{2}{2-x}-1\right)\mathrm{d}x$

$=-2\ln|2-x|\big|_0^1-1=2\ln 2-1$ （12 分）