

2021 研究生入学考试考研数学试卷（数学二）

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

1. $\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1) dt$ 是 x^7 的

- (A) 低阶无穷小 (B) 等价阶无穷小 (C) 高阶无穷小 (D) 同阶但非等价无穷小

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处

- (A) 连续且取得极大值 (B) 连续且取得极小值
(C) 可导且导数为零 (D) 可导且导数不为零

3. 有一圆柱体，底面半径与高随时间的变化率分别为 $2cm/s$ ， $-3cm/s$ ，当底面半径为 $10cm$ ，高为 $5cm$ 时，圆体的体积与表面积随时间的变化速率为

- (A) $125\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$ (B) $125\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$
(C) $-100\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$ (D) $-100\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$

4. 函数 $f(x) = ax - b \ln x (a > 0)$ 有 2 个零点，则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是

- (A) $(e, +\infty)$ (B) $(0, e)$ (C) $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ (D) $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

5. 设函数 $f(x) = \sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+a+bx^2$ ，则

- (A) $a=1, b=-\frac{1}{2}$ (B) $a=1, b=\frac{1}{2}$ (C) $a=0, b=-\frac{1}{2}$ (D) $a=0, b=\frac{1}{2}$

6. 设函数 $f(u, v)$ 可微且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$ ， $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$ ，则 $df(1, 1) =$

- (A) $dx + dy$ (B) $dx - dy$ (C) dy (D) $-dy$

7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x) dx =$

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$
 (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n}$

8. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数和负惯性指数分别为

- (A) 2, 0 (B) 1, 1 (C) 2, 1 (D) 1, 2

9. 设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示出, 则

- (A) $Ax=0$ 的解均为 $Bx=0$ 解 (B) $A^T x=0$ 的解均为 $B^T x=0$ 解
 (C) $Bx=0$ 的解均为 $Ax=0$ 解 (D) $B^T x=0$ 的解均为 $A^T x=0$ 解

10. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, 若三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q , 使得 PAQ 为

对角矩阵, 则 P, Q 分别取

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| 3^{-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设函数 $Z=Z(x,y)$ 由方程 $(x+1)^z + y \ln \arctan x$ 确定, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,2)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

14. 已知函数 $f(t) = \int_1^{t^2} dx \int_{\sqrt{x}}^t \sin \frac{x}{y} dy$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. 微分方程有 $y''' - y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

16. 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的 x^3 项的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 请将答案写在答题纸指定位置上.

17. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \int_0^x e^t dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right).$

18. 设函数 $f(x) = \frac{x|x|}{1+x}$, 求函数 $f(x)$ 的凹凸性及渐近线.

19. 设函数 $f(x)$ 满足 $\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{6}x^2 - x + c$, L 为曲线 $y = f(x) (4 \leq x \leq 9)$. 记 L 的长度为 S , L 绕 x 轴旋转的旋转曲面的面积为 A , 求 S 和 A .

20. $y = y(x) (x > 0)$ 是微分方程 $xy' - 6y = -6$ 满足 $y(\sqrt{3}) = 10$ 的解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 设 p 为曲线 $y(x)$ 上的一点, 记 p 处法线在 y 轴上的截距为 I_p . I_p 最小时, 求 p 的坐标.

21. 设 D 由曲线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 (x \geq 0, y \geq 0)$ 与 x 轴围成, 求 $\iint_D xy dx dy$.

22. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 仅有两个不同特征值, 若 A 相似于对角矩阵. 求 a, b . 求逆矩阵 p ,

使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

新东方大学生学习与发展中心

2021 考研数学试卷答案速查 (数学二)

一、选择题

- (1) (C) (2) (D) (3) (C) (4) (A) (5) (D)
 (6) (C) (7) (B) (8) (B) (9) (D) (10) (C)

二、填空题

(11) $\frac{1}{\ln 3}$ (12) $\frac{2}{3}$ (13) 1

(14) $\frac{\pi}{2} \cos \frac{2}{\pi}$ (15) $y = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$

(16) -5

三、解答题

(17) 【解析】原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \int_0^x e^{t^2} dt\right) \sin x - e^x + 1}{(e^x - 1) \sin x}$ (2分)

= $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - e^x + 1}{(e^x - 1) \sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \int_0^x e^{t^2} dt}{(e^x - 1) \sin x}$ (4分)

= $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x^2) + 1 - \left[1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)\right]}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x}$ (7分)

= $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} x^2 + o(x^2)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2}$ (9分)

= $\frac{1}{2}$ (10分)

(18) 【解析】 $f'(x) = \begin{cases} -\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{2x+x^2}{(1+x)^2}, & x > 0 \end{cases}$, $f''(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(1+x)^3}, & x < 0 \\ \frac{2}{(1+x)^3}, & x > 0 \end{cases}$. (4分)

凹区间: $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$; 凸区间: $(-1, 0)$ (6分)

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x|x|}{1+x} = \infty$, 垂直渐近线: $x = -1$. (7分)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(1+x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{1+x} = -1, \quad (9 \text{ 分})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x(1+x)} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + x + x^2}{1+x} = 1, \quad (11 \text{ 分})$$

斜渐近线: $y = x - 1$ 和 $y = -x + 1$. (12 分)

(19) 【解析】等式左右两边对 x 求导, $\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3}x - 1, \quad f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$ (2 分)

$$\text{长度 } s = \int_4^9 \sqrt{1+f^2(x)} dx = \int_4^9 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_4^9 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2} dx \quad (5 \text{ 分})$$

$$= \int_4^9 \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right) \Big|_4^9 = \frac{22}{3}. \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{面积 } A = \int_4^9 2\pi f(x) \sqrt{1+f^2(x)} dx = \int_4^9 2\pi \left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) dx \quad (10 \text{ 分})$$

$$= \pi \int_4^9 \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) dx = \pi \left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + x\right) \Big|_4^9 = \frac{425}{9}\pi. \quad (12 \text{ 分})$$

(20) 【解析】(1) 求解微分方程: $y' - \frac{6}{x}y = -\frac{6}{x}$, (1 分)

$$\text{则: } y = e^{\int \frac{6}{x} dx} \left[\int -\frac{6}{x} e^{-\int \frac{6}{x} dx} dx + C \right] = x^6 \left[\int -\frac{6}{x} \cdot x^{-6} dx + C \right] = Cx^6 + 1, \quad (4 \text{ 分})$$

且 $y(\sqrt{3}) = 10$, 故: $y(x) = \frac{1}{3}x^6 + 1, \quad (x > 0)$. (6 分)

(2) 设 p 点的坐标为: (x, y) , 法线: $Y - y = -\frac{1}{y'(x)}(X - x)$,

过 p 点的法线方程为: $Y - y = -\frac{1}{2x^5}(X - x)$, (8 分)

$$X = 0 \text{ 时, } y \text{ 轴上的截距: } I_p = Y = \frac{1}{2x^4} + y = \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3}x^6 + 1, \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{令 } I_p' = -\frac{2}{x^5} + 2x^5 = 0, \text{ 得驻点: } x = 1, \text{ 唯一的极值点为最值点, (11 分)}$$

则 I_p 最小时, p 的坐标为 $(1, \frac{4}{3})$. (12 分)

(21) 【解析】 $\iint_D xy dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^3 dr$

(6分)

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \sin \theta \cdot \cos^2 2\theta d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\theta \cdot \cos^2 2\theta d\theta \quad (9分)$$

$$= -\frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta d \cos 2\theta = -\frac{1}{48} \cos^3 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{48}. \quad (12分)$$

(22) 【解析】

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & -a & \lambda - b \end{vmatrix} = (\lambda - b)[(\lambda - 2)^2 - 1] = (\lambda - b)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \quad (2分)$$

(1) 当 $b=1$ 时, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$, A 相似于对角矩阵, 则 $r(E - A) = 1, a = 1$ (4分)

$$(E - A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3E - A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令可逆矩阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$. (7分)

(2) 当 $b=3$ 时, $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$, A 相似于对角矩阵, 则 $r(3E - A) = 1, a = -1$ (9分)

$$(3E - A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(E - A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令可逆矩阵 $P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$. (12分)