2021 研究生入学考试考研数学试卷（数学三）

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

1. 当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x^2}\left(e^{t^3}-1\right)dt$ 是 x^7 的

（A）低阶无穷小　（B）等价阶无穷小　（C）高阶无穷小　（D）同阶但非等价无穷小

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

（A）连续且取得极大值　（B）连续且取得极小值

（C）可导且导数为零　（D）可导且导数不为零

3. 函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有 2 个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是

（A）$(e,+\infty)$　（B）$(0,e)$　（C）$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$　（D）$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

4. 设函数 $f(u,v)$ 可微且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

（A）$dx+dy$　（B）$dx-dy$　（C）dy　（D）$-dy$

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数和负惯性指数分别为

（A）2，0　（B）1，1　（C）2，1　（D）1，2

6. 设 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$ 为 4 阶正交矩阵,若矩阵 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \alpha_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$,$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$k$ 表示任意常数,则线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为 $x=$

（A）$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+k\alpha_1$　（B）$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+k\alpha_2$

（C）$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+k\alpha_3$　（D）$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+k\alpha_4$

7. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$，若三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q，使得 PAQ 为对角矩阵，则 P、Q 分别取

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

8. 设 A,B 为随机事件,且 $0<P(B)<1$,下列命题中为假命题的是

(A) 若 $P(A|B)=P(A)$,则 $P(A|\overline{B})=P(A)$.

(B) 若 $P(A|B)>P(A)$,则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(\overline{A})$

(C) 若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$,则 $P(A|B)>P(A)$

(D) 若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$,则 $P(A)>P(B)$

9. 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本,令 $\theta=\mu_1-\mu_2,\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$,则

(A) $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$　(B) $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(C) $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$　(D) $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

10. 总体 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=\frac{1-\theta}{2},P\{X=2\}=P\{X=3\}=\frac{1+\theta}{4}$,利用来自总体 X 的样本观察值 $1,3,2,2,1,3,1,2$ 可得 θ 的最大似然估计值为

(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{3}{8}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{5}{8}$

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

11. 若 $y=\cos e^{-\sqrt{x}}$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$__________.

12. $\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx=$________.

13. 设D由 $y=\sqrt{x}\sin\pi x\left(0\le x\le1\right)$ 与x轴围成，则D绕 x 轴旋转的旋转体体积为______.

14. 差分方程 $\Delta y_t=t$ 的通解为________.

15. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x&x&1&2x\\1&x&2&-1\\2&1&x&1\\2&-1&1&x\end{vmatrix}$ 的 x^3 项的系数为__________.

16. 甲乙中各装 2 红 2 白球，从甲盆中任取一球，观察颜色放入乙盆，再从乙盆中任取一球，令 X，Y 分别从甲乙两盆中取得红球的个数，则 $\rho_{XY}=$________.

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答题纸指定位置上．

17. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}]$ 存在,求 a 的值.

18. 求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\frac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

19. 设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分,计算二重积分 $\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

20. 设 n 为正整数, $y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$ 的解.(1)求 $y_n(x)$;(2)求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

21. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同特征值, 若 A 相似于对角矩阵.求 a,b.求逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

22. 在区间 $(0,2)$ 上随机取一点,将该区间分成两段,较短一段的长度记为 X ,较长一段的长度记为 Y .令 $Z=\frac{Y}{X}$.

(1)求 X 的概率密度;

(2)求 Z 的概率密度;

(3)求 $E(\frac{X}{Y})$.

2021 考研数学试卷答案速查（数学三）

一、选择题

(1) C	(2) D	(3) A	(4) C	(5) B
(6) D	(7) C	(8) D	(9) B	(10) A

二、填空题

(11) $\dfrac{\sin e^{-1}}{2e}$　　(12) 6　　(13) $\dfrac{\pi}{4}$

(14) $\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2}t+c$　　(15) -5　　(16) $\dfrac{1}{5}$

三、解答题

(17) $\lim\limits_{x\to0^+}[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\dfrac{\pi}{2}a+\mathrm{e}$;　(3 分)

$\lim\limits_{x\to0^-}[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1-x)^{-\frac{1}{x}}]=-\dfrac{\pi}{2}a+\mathrm{e}^{-1}$;　(3 分)

则其左极限等于右极限: $\dfrac{\pi}{2}a+\mathrm{e}=-\dfrac{\pi}{2}a+\mathrm{e}^{-1}$,解得

$$a=\frac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}}{\pi}.$$　(4 分)

(18) 令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=\dfrac{2x^2+x-1-y^2}{x^3}=0,\\ f_y'(x,y)=\dfrac{y}{x^2}=0,\end{cases}$ 得驻点 $(-1,0)$ 和 $(\dfrac{1}{2},0)$.　(4 分)

$$\begin{cases} f_{xx}''(x,y)=\dfrac{-2x^2-2x+3+3y^2}{x^4},\\ f_{yx}''(x,y)=-\dfrac{2y}{x^3},\\ f_{yy}''(x,y)=\dfrac{1}{x^2},\end{cases}$$

在 $(-1,0)$ 处， $A=3>0,B=0,C=1>0,AC-B^2>0$，所以有

极小值 $f(-1,0)=2$；　(4 分)

在 $(\dfrac{1}{2},0)$ 处， $A=24>0,B=0,C=4>0,AC-B^2>0$，所以有

极小值 $f(\dfrac{1}{2},0)=\dfrac{1}{2}-2\ln2$.　(4 分)

(19) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \mathrm{e}^{r^2+2r^2\cos\theta\sin\theta}(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)r\mathrm{d}r$ (4 分)

$$=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{r^2(1+\sin 2\theta)}r^3\cos 2\theta\mathrm{d}\theta \quad (4\text{ 分})$$

$$=\int_0^1\frac{r}{2}\mathrm{e}^{r^2(1+\sin 2\theta)}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^1 r(\mathrm{e}^{2r^2}-\mathrm{e}^{r^2})\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2r^2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{r^2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{8}(\mathrm{e}-1)^2 \quad (4\text{ 分})$$

(20)（Ⅰ）$xy'-(n+1)y=0$，化简得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=(n+1)\frac{\mathrm{d}x}{x}$，两边积分，得 $\ln|y|=(n+1)\ln|x|+C_0$，

化简得 $y=Cx^{n+1}$.

$\because y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$，$\therefore C=\frac{1}{n(n+1)}$，$\therefore y_n(x)=\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$. （4 分）

（Ⅱ）令 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}}{\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}}\right|<1$，得 $-1<x<1$.

$x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛；$x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ 收敛；收敛域为 $[-1,1]$. （4 分）

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=x\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'\mathrm{d}x-\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'\mathrm{d}x$$

$$=x\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x-\int_0^x\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=(1-x)\ln(1-x)+x \qquad x\in[-1,1)$$

$$S(1)=\lim_{x\to 1^-}[(1-x)\ln(1-x)+x]=1$$

$$\therefore S(x)=\begin{cases}x+(1-x)\ln(1-x), & -1\leqslant x<1\\ 1, & x=1\end{cases}. \quad （4\text{ 分}）$$

(21) $|A-\lambda E|=(b-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)$，

因为矩阵仅有两个不同的特征值，故$b=1$或$b=3$.

当$b=1$时，$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$，

因为A相似与对角矩阵，故$r(A-E)=1\Rightarrow a=1$，　　(2 分)

解$(A-E)x=O$得$\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，解$(A-3E)x=O$得$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，

令$P=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}$；　　(4 分)

当$b=3$时，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=3$，

因为A相似与对角矩阵，故$r(A-E)=1\Rightarrow a=-1$，　　(2 分)

解$(A-E)x=O$得$\beta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$，解$(A-3E)x=O$得$\beta_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\beta_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，

令$P=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&3\end{bmatrix}$.　　(4 分)

(22) 易知$X+Y=2,Y>X>0$，且X在$(0,1)$上服从均匀分布;

（Ⅰ）X的概率密度$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\0, & 其他\end{cases}$.　　(4 分)

（Ⅱ）Z的分布函数$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\left\{\dfrac{2-X}{X}\leqslant z\right\}$:

$z<1$时，$F_Z(z)=0$；$z\geqslant1$时，$F_Z(z)=\int_{\frac{2}{z+1}}^{1}1dx=1-\dfrac{2}{z+1}$；

Z的概率密度为$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2}, & z\geqslant1\\0, & 其他\end{cases}$.　　(4 分)

（Ⅲ）$E\left(\dfrac{X}{Y}\right)=E\left(\dfrac{X}{2-X}\right)=\int_0^1\dfrac{x}{2-x}\mathrm{d}x=\int_0^1(\dfrac{2}{2-x}-1)\mathrm{d}x$

$$=-2\ln|2-x|\Big|_0^1-1=2\ln 2-1$$ (4 分)